

4.4 Systèmes de coordonnées

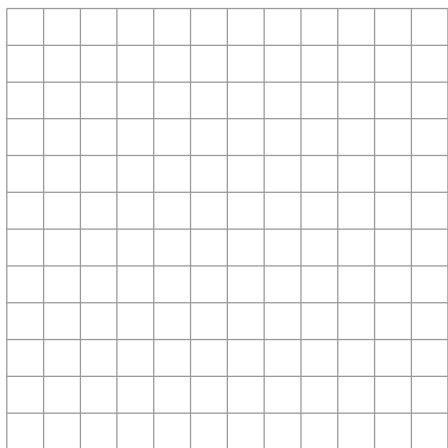
Rappel

Soient $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$ donnée par

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}^2$. Pour le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, on a les combinaisons linéaires

$$\vec{v} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \quad \text{et} \quad \vec{v} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2.$$



Théorème 36. Soient V un espace vectoriel et soit $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de V . Alors pour tout $v \in V$ il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ uniques tels que

Définition 44 (composantes dans une base).

Les scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont les *composantes/coordonnées* de l'élément v dans la base $\mathcal{B}$. On note

Exemples

L'application coordonnée

Définition 45 (application coordonnée).

Soient V un espace vectoriel et soit $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de V . On définit l'*application coordonnée*

Théorème 37. *L'application $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ est linéaire et bijective.*

Preuve

Définition 46 (Isomorphisme).

Soient V et W deux espaces vectoriels et $T : V \rightarrow W$ une application linéaire bijective. Alors T est dit un *isomorphisme d'espaces vectoriels*.

Exemple

Changement de bases

Exemple

Reprenons les bases $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ de $\mathbb{R}^2$ de l'exemple ci-dessus et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Généralisation à un espace vectoriel V quelconque

Soit V un espace vectoriel et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de V .

Changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$

Théorème 38. Soient V un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ et $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ deux bases de V . Alors il existe une unique matrice $P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ telle que

La matrice $P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ est donnée par

De plus, elle est inversible d'inverse $P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ où

Exemple

4.5 Dimension d'un espace vectoriel

Théorème 39. *Soient V un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de V . Alors toute famille d'éléments de V avec plus de n éléments sera linéairement dépendante.*

Théorème 40. *Soient V un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de V . Alors toute autre base de V possède exactement n éléments.*

Définition 47 (dimension).

Soit V un espace vectoriel.

1. Si V admet une famille génératrice avec un nombre fini d'éléments, on dira que V est de dimension finie. On notera sa dimension $\dim V$, où $\dim V$ est le nombre d'éléments dans une base quelconque de V .
2. Si V n'admet pas de famille génératrice finie, on dira que V est de dimension infinie et on note $\dim V = \infty$.
3. Si $V = \{0_V\}$, alors on dira que $\dim V = 0$.

Exemples

Théorème 41 (Base incomplète).

Soient V un espace vectoriel de dimension finie et W un sous-espace vectoriel de V . Alors toute famille d'éléments linéairement indépendants de W peut être complétée en une base de W (et aussi de V). On a que

Exemple

Théorème 42. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie avec $\dim V = n$ pour $n \geq 1$. Alors*

- 1. Toute famille linéairement indépendante d'exactly n éléments est une base de V .*
- 2. Toute famille génératrice formée d'exactly n éléments est une base de V .*

Dimension de $\text{Ker}(A)$ et de $\text{Im}(A)$

Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ avec $A = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n)$.

Définition 48 (rang).

Soient V, W des espaces vectoriels et soit $T : V \rightarrow W$ une transformation linéaire. On appelle *rang* de T la dimension de $\text{Im}(T)$.

Si $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est linéaire et si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ est la matrice canoniquement associée à T , on a $\text{Im}(T) = \text{Im}(A)$. On parlera alors du rang de A .

Exemple

Théorème 43 (du rang).

1. Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ une matrice. Alors

2. Soit $T : V \rightarrow W$ où V et W sont des espaces vectoriels avec V tel que $\dim(V) = n$.

Exemple

Théorème 44 (Suite du théorème 23).

Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.

2.

3.

4.

Espaces des lignes de A et $A^\top$

Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Définition 49 (espace des lignes).

Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ une matrice. Le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par les lignes de A s'appelle l'espace des lignes et est donné par

Remarque

Théorème 45. *Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ une matrice.*

- 1. Si B est une matrice équivalente à A selon les lignes, alors leurs lignes engendrent le même espace.*
- 2. On a*

Preuve

Exemple

Remarque

4.6 Matrices d'applications linéaires et application coordonnée

Soient V, W des espaces vectoriels, $T : V \rightarrow W$ une application linéaire et $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ resp. $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ des bases de V et W .

Au niveau des coordonnées, l'application T est représentée par une matrice $M \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ telle que

On dira que M représente T dans les bases $\mathcal{B}$ (de départ) et $\mathcal{C}$ (d'arrivée).
Déterminons les coefficients de la matrice M :
Soit $v \in V$ avec $v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$, autrement dit

Alors par linéarité de T , on a

$$T(v) = T(\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n) = \alpha_1 T(b_1) + \dots + \alpha_n T(b_n).$$

Par linéarité de l'application coordonnée, il vient :

Remarques

Exemple

Remarque